



TITLE:

Necessary Conditions for Mixed Problems to Be C^∞ -Well Posed (線型および非線型偏微分方程式の研究)

AUTHOR(S):

若林, 誠一郎

CITATION:

若林, 誠一郎. Necessary Conditions for Mixed Problems to Be C^∞ -Well Posed (線型および非線型偏微分方程式の研究). 数理解析研究所講究録 1980, 402: 66-83

ISSUE DATE:

1980-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102291>

RIGHT:

Necessary Conditions for Mixed Problems to Be C^∞ -well Posed

筑波大 数学系 若林誠一郎

1. 序. Lax [5], Mizohata [6] において、非特性 Cauchy 問題が C^∞ -適切であるためには、その主部が双曲型であること、すなわち、特性方程式が実根のみをもつことが必要であることが証明された。また、Ivrii-Petkov [3] において、Lax-Mizohata の定理の簡単な別証が与えられている(但し、 C^∞ -適切性の定義が少し異なる)。一方、混合問題に対しては、いくつかの仮定の下で、Kajitani [4] において、Cauchy 問題に対応する必要条件が与えられている。ここでは、[4]における仮定がゆるめられることをしめす。そのために [3]の方法を修正して、混合問題に適用し、混合問題が C^∞ -適切であるための必要条件を導く。また、以下の方法を Cauchy 問題に適用すれば、Lax-Mizohata の定理のより簡単な別証が得られる(但し、 C^∞ -適切性の定義が少し異なる)。

2. 問題および結果. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x \xleftrightarrow{\text{dual}} \xi$, $y \leftrightarrow \eta$, $x' \leftrightarrow \xi'$,
 $D = -i(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $D_y = -i\partial/\partial y$ とし, $\Omega \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$
 における $(x, y) = (0, 0)$ の開近傍とする。さらに、

$$\Omega_T^\pm = \{(x, y) \in \Omega; \pm(x_1 - T) \geq 0\}, \quad T \in \mathbb{R},$$

$$\hat{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n; (x, 0) \in \Omega\}$$

と表わす。

$$L(x, y, D, D_y) \equiv (L_{ij}(x, y, D, D_y)) = \sum_{|a|+|j| \leq m} A_{aj}(x, y) D^a D_y^j,$$

$A_{aj}(x, y)$: $N \times N$ 行列に値をとる C^∞ -関数

とし、整数の組 $\{m_j, n_j\}_{j=1, \dots, N} \subset \mathbb{Z}$ が与えられていて、

$\deg L_{ij}(x, y, \xi, \eta) \leq m_i + n_j$ ((ξ, η) の多項式として) を満たしているものとする。但し、多項式 $L(\xi, \eta) \equiv 0$ の次数は任意の次数であると考ええる。 $L_{ij}^0(x, y, \xi, \eta)$ を $L_{ij}(x, y, \xi, \eta)$ の $(m_i + n_j)$ 次斉次部分とし、 $N \times N$ 行列 $L^0(x, y, \xi, \eta) = (L_{ij}^0(x, y, \xi, \eta))$ に対して、 $P(x, y, \xi, \eta) = \det L^0(x, y, \xi, \eta)$ とおく。そのとき、

$$P(x, y, \xi, \eta) \neq 0 \quad \text{in } (\xi, \eta)$$

であると仮定する。

$$B(x, D, D_y) \equiv (B_{ij}(x, D, D_y)) = \sum_{|a|+|j| \leq b} B_{aj}(x) D^a D_y^j,$$

$B_{aj}(x)$: $l \times N$ 行列に値をとる C^∞ -関数

とし、整数の組 $\{b_j\}_{j=1, \dots, l} \subset \mathbb{Z}$ が与えられていて、 $\deg B_{ij}(x, \xi, \eta) \leq b_i + n_j$ を満たしているものとする。 $B_{ij}(x, \xi, \eta)$

の $(b_i + n_j)$ 次斉次部分を $B_{ij}(x, \xi, \eta)$ とし、 $B^0(x, \xi, \eta) = (B_{ij}(x, \xi, \eta))$ とおく。混合問題

$$(1) \quad \begin{cases} L(x, y, D, D_y) u(x, y) = f(x, y) & \text{in } \Omega, \\ B(x, D, D_y) u(x, y)|_{y=0} = h(x) & \text{in } \hat{\Omega}, \\ \text{supp } u(x, y) \subset \Omega_T^+ \end{cases}$$

を考える。ここで、 $u = {}^t(u_1, \dots, u_N)$, $f = {}^t(f_1, \dots, f_N)$, $h = {}^t(h_1, \dots, h_L)$ である。

定義 1. 混合問題(1)が Ω_T^+ で C^∞ -適切である。
 $\xleftrightarrow{\text{def.}}$

- (E) $\forall f \in C^\infty(\Omega)$, $\forall h \in C^\infty(\hat{\Omega})$ with $\text{supp } f \subset \Omega_T^+$, $\text{supp } h \subset \hat{\Omega}_T^+$ に対して、(1)の解 $u \in C^\infty(\Omega)$ が存在する。
- (U) $t \geq T$ に対して、 $u \in C^\infty(\Omega)$, $\text{supp } u \subset \Omega_T^+$, $Lu = 0$ in Ω_t^- かつ $Bu|_{y=0} = 0$ in $\hat{\Omega}_t^-$ ならば、 $u = 0$ in Ω_t^- である。

定義 2. Γ を原点と頂点をもつ \mathbb{R}^{n+1} の開凸錐で、 $\overline{\Gamma} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1 > 0\} \cup \{0\}$ をみたすものとする。混合問題(1)が Γ -有限伝播性をもつとは、各 $(x^0, y^0) \in \Omega_T^+$ with $x_1^0 > T$ and $\Gamma(x^0, y^0) \cap \Omega_T^+ \subset \Omega_T^+$ に対して、次が成立するときをいう：

$u \in C^\infty(\Omega)$, $\text{supp } u \subset \Omega_T^+$, $Lu = 0$ in $\Gamma(x^0, y^0) \cap \Omega_T^+$
 かつ $Bu|_{y=0} = 0$ in $\hat{\Gamma}(x^0, y^0) \cap \hat{\Omega}_T^+$ ならば, $u = 0$ in
 $\Gamma(x^0, y^0) \cap \Omega$ である。

ここで, $K \subset\subset \Omega$ は $\bar{K} \subset \Omega$ かつ \bar{K} がコンパクトであることを意味する。また,

$$\Gamma(x^0, y^0) = \{(x, y^0) \mid x \in \Gamma\}, \quad \hat{\Gamma}(x^0, y^0) = \{x \in \mathbb{R}^n; (x, 0) \in \Gamma(x^0, y^0)\}$$

である。

次の仮定をおく。

$$(A-1) \quad P(x, y, \nu, 0) \neq 0 \quad \text{for } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+.$$

ここで, $\nu = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ である。そのとき、次の命題が成立する。

命題 3 ([5], [6], [3]) 仮定 (A-1) の下で、(1) が Ω_T^+ で C^∞ -適切ならば、各 $(x, y) \in \Omega_T^+$ に対して $P(x, y, \xi, \eta)$ が、 $(\nu, 0)$ に関して双曲型であることが必要である。すなわち、

$$P(x, y, \xi, \eta) \neq 0 \quad \text{for } (x, y) \in \Omega_T^+, \text{Im } \xi_1 < 0, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}, \eta \in \mathbb{R}$$

であることが必要である。

故に、(A-1) のかわりに、

$$(A-1)' \quad \text{各 } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+ \text{ に対して、} P(x, y, \xi, \eta) \text{ が } (\nu, 0) \text{ に}$$

関して双曲型である。

と仮定しても、一般性を失わない。さらに、 $\{L^0, B^0\}$ に対して次の条件を課す：

(A-2) $\deg_{\eta} P(x, 0, \eta, \eta)$ は、 $x \in \mathbb{R}^n$ によらず一定である。

(A-3) $P(0, 0, -i\eta, \eta) = 0$ の虚部正の根の数は l に等しい。
さらに、 $l \geq 1$ である。

(A-4) $\Delta(x, -i\eta) \neq 0$ for $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

そこで、 $\Delta(x, \xi)$ は $\{L^0, B^0\}$ に対する Lopatinski 行列式である (§3 で定義される)。そのとき、次の定理を得る。

定理 4 条件 (A-1)', (A-2 ~ 4) が満たされていると仮定する。そのとき、混合問題 (1) が Ω_T^+ で C^∞ -適切であるためには、 $\{L^0, B^0\}$ が Lopatinski 条件を満たすことが必要である。すなわち、

$$\Delta(x, \xi) \neq 0 \text{ for } x \in \hat{\Omega}_T^+, \operatorname{Im} \xi_1 < 0 \text{ and } \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

を満たすことが必要である。

注意 (A-4) が満たされないとき、上の定理は正しくない。
(i) (Sakamoto [8]), 定係数のとき、 $\Delta(\xi) \equiv 0$ だが C^∞ -適切である例がある。これは、Lopatinski 行列式の主部は一般に $\{L^0, B^0\}$ だけから成りまらず、低階にも依存することをしめす。

(ii) (Soga [10], [11]) 波動方程式に対する混合問題で、 C^{∞} -適切であるとして $\Delta(x, -i\partial) = 0$ となる例がある。

有限伝播性について、次の定理が知られている。

命題 5 ([7], [3]) 混合問題 (1) が Ω_T^+ で C^{∞} -適切かつ Γ -有限伝播性をもつならば、そのとき

$$P(x^0, y^0, \xi, \eta) \neq 0 \text{ for } (x^0, y^0) \in \Omega_T^+, \Gamma(x^0, y^0) \cap \Omega_T^+ \subset \subset \Omega_T^+ \\ \text{and } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1} - i(\text{int } \Gamma^*)$$

が成立する。ここで

$$\Gamma^* = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \cdot \xi + y \cdot \eta \geq 0 \text{ for } \forall (x, y) \in \Gamma\}$$

で、 $\text{int } \Gamma^*$ は Γ^* の \mathbb{R}^{n+1} における内部を表わす。

注意 この命題において、(A-1)~(4) は仮定されていない。

命題 5 に対応して、次の定理が成立する。

定理 6 条件 (A-1)', (A-2), (A-3) および

$$(A-4)' \quad \Delta(x, \xi) \neq 0 \text{ in } \xi \text{ for each } x \in \mathbb{R}^n$$

が満たされていると仮定する。混合問題 (1) が Ω_T^+ で C^{∞} -適切かつ Γ -有限伝播性をもつならば、そのとき

$$\Delta(x^0, \xi^0) \neq 0 \text{ for } x^0 \in \hat{\Omega}_T^+, \Gamma(x^0, 0) \cap \Omega_T^+ \subset \subset \Omega_T^+ \text{ and } \xi \in \mathbb{R}^n - i(\text{int } \dot{\Gamma}^*)$$

が成立する。ここで

$$\dot{\Gamma}^* = \{ \xi \in \mathbb{R}^n; (\xi, \eta) \in \Gamma^* \text{ for some } \eta \in \mathbb{R} \}$$

で、 $\text{int } \dot{\Gamma}^*$ は \mathbb{R}^n における $\dot{\Gamma}^*$ の内部を表わす。

注意 $\forall \xi \in \text{int } \dot{\Gamma}^*$ であり、仮定 (A-1)', (A-2), (A-3), (A-4)' の下で、 C^∞ -適切かつ (A-4) が満たされなければ、有限伝播性をもたないことがわかる。

以下において定理4の略証を与える。定理6も同様に証明することができる。

3. 準備. Banach の閉グラフ定理と Seeley [9] を適用して、次を得る。

補題7. 混合問題(1)が Ω_T^+ で C^∞ -適切であると仮定する。そのとき、任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega_T^+$ と非負整数 μ に対して、正定数 $C_{\mu, K}$ と非負整数 ℓ が存在して、

$$(2) \quad \|u\|_{p, K_T^-} \leq C_{\mu, K} \{ \|Lu\|_{q, K_T^-} + \|Bu\|_{q=0, q, K_T^-} \} \\ \text{for } \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}, \text{supp } u \subset K$$

が成立する。ここで、

$$\|f\|_{p,K} = \sup_{(x,y) \in K, |x|+j \leq p} |D^x D_y^j f(x,y)|,$$

$$\|h\|_{p,R} = \sup_{x \in R, |x| \leq p} |D^x h(x)|$$

である。

また同様に、Seely [9] ではなく Bierstone [2] を適用して、次の補題を得る。この補題は定理 6 を証明するときに必要となり、したがって、ここでは用いない。

補題 8 混合問題 (1) が Ω_T^+ で C^∞ -適切かつ \mathcal{P} -有限伝播性をもつと仮定する。そのとき、任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega_T^+$ と非負整数 p に対して、正定数 $C_{p,K}$ と非負整数 δ が存在して、

$$\begin{aligned} \|u\|_{p, \mathcal{P}(x^0, 0) \cap \Omega} &\leq C_{p,K} (x_1^0 - T)^{-\delta} \{ \|Lu\|_{q, \mathcal{P}(x^0, 0) \cap \Omega} \\ &\quad + \|Bu\|_{q=0, \mathcal{P}(x^0, 0) \cap \hat{\Omega}} \} \text{ for } u \in C_0^\infty(\Omega), \\ &\quad \text{supp } u \subset K \text{ and } \mathcal{P}(x^0, 0) \in \Omega_T^+ \text{ with } x_1^0 > T, \mathcal{P}(x^0, 0) \cap \Omega_T^+ \subset \Omega_T^+ \end{aligned}$$

が成立する。

次に Lopatinski 行列式を定義しよう。以下、(A-1)', (A-2), (A-3) がつねに満たされているものと仮定する。 $\Gamma_x(\mathcal{P})$ を集合 $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1}; \mathcal{P}(x, 0, \xi, \eta) \neq 0\}$ の $(0, 0)$ を含む連結成分とし、

$$\dot{\Gamma}_x(P) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n; (\xi, \eta) \in \Gamma_x(P) \text{ for some } \eta \in \mathbb{R} \}$$

とおく。そのとき、(A-1)'より

$$\deg_{\eta} P(x, 0, \xi, \eta) = \deg_{\eta} P(x, 0, \eta, \eta) \text{ for } x \in \mathbb{R}^n \text{ and } \xi \in \mathbb{R}^n - i \dot{\Gamma}_x(P)$$

が成立する。故に仮定より、各 $x \in \mathbb{R}^n$, ξ ($\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\operatorname{Im} \xi_1 < 0$) に対して、 $P(x, 0, \xi, \eta) = 0$ の虚部正の根の個数は l 個であることが示された (重複度をこめて)。

$$A(x, \xi, \eta) = B^0(x, \xi, \eta)^+ \operatorname{cof} L^0(x, 0, \xi, \eta),$$

$$P_+(x, 0, \xi, \eta) = \prod_{j=1}^l (\eta - \lambda_j^+(x, \xi)) \text{ for } x \in \mathbb{R}^n, \operatorname{Im} \xi_1 < 0, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

とおく。ここで、 $\lambda_j^+(x, \xi)$ は $P(x, 0, \xi, \eta) = 0$ の虚部正の根を表わす。さらに、

$$\tilde{A}(x, \xi, \eta) = (a_{jk}(x, \xi, \eta)) \equiv A(x, \xi, \eta) \pmod{P_+(x, 0, \xi, \eta)},$$

$$a_{jk}(x, \xi, \eta) = \sum_{s=1}^l a_{jk}^{(s)}(x, \xi) \eta^{s-1},$$

$$L(x, \xi) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(l)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1}^{(1)} & \cdots & a_{l1}^{(l)} & a_{l2}^{(1)} & \cdots & a_{lN}^{(l)} \end{pmatrix}$$

とおく。

定義 9. $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Im} \xi_1 < 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して $\{L^0, B^0\}$ に対する Lopatinski 行列式 $\Delta(x, \xi)$ を

$$\Delta(x, \xi) = \sum_i |\Delta_i(x, \xi)|$$

によって定義する。ここで、 $\Delta_i(x, \xi)$ は $L(x, \xi)$ の l 次小行列

列式で、上の和はこの小行列式全体にあててとられる。

注意 $P_+(x, 0, \xi, \eta)$ は $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n - i\dot{P}_x(P)$, $\eta \in \mathbb{C}^k$ に対して定義されるので、 $\Delta(x, \xi)$ も $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n - i\dot{P}_x(P)$ に対して定義される。

補題 10 ([1], [12]) $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^n - i\dot{P}_{x^0}(P)$ に対して、次の条件は同値である。

(i) 常微分方程式系

$$\begin{cases} L^0(x^0, 0, \xi^0, D_y) v(y) = 0, & y > 0, \\ B^0(x^0, \xi^0, D_y) v(y)|_{y=0} = h, \\ \exp[y \cdot \eta^0] v(y) \in L^2(\bar{\mathbb{R}}_+) \end{cases}$$

が任意の $h \in \mathbb{C}^k$ に対して一意解をもつ。ここで、 $\eta^0 \in (-\operatorname{Im} \xi^0, -\eta^0) \in P_{x^0}(P)$ をみえすように1つえらんでおく。

(ii) $\mathcal{A}(x^0, \xi^0, \eta)$ の行ベクトル l が $P_+(x^0, 0, \xi^0, \eta)$ を法として一次独立である。

(iii) $\operatorname{rank} \mathcal{L}(x^0, \xi^0) = l$, i.e., $\Delta(x^0, \xi^0) \neq 0$.

4. 定理4の略証. $x^0 \in \hat{\Omega}_T^+$, ξ^0 ($\xi^0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\operatorname{Im} \xi_1 < 0$) が存在して、 $\Delta(x^0, \xi^0) = 0$ であると仮定して、(2)に矛盾する漸近解を構成すれば、定理4が証明されたことになる。一般性を

失うことなく、 $x^0 = 0$ と仮定してよい。変数変換 $(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y})$

$$x_1 = p^{-2\nu+K} \tilde{x}_1, \quad x' = p^{-\nu} \tilde{x}', \quad y = p^{-2\nu} \tilde{y} \quad (\nu \gg K > 0)$$

をし、 (\tilde{x}, \tilde{y}) を改めて (x, y) とかくことにする。上の変換は [3] において用いられたものと少し異なり、そのため以下
の議論が適用できる。すなわち、最終的には単因子論を用い
て常微分方程式系を解くことにより、漸近解が構成できる。

$$L_p(x, y, D, D_y) = L(p^{-2\nu+K} x_1, p^{-\nu} x', p^{-2\nu} y, p^{2\nu-K} D_1, p^\nu D', p^{2\nu} D_y),$$

$$B_p(x, D, D_y) = B(p^{-2\nu+K} x_1, p^{-\nu} x', p^{2\nu-K} D_1, p^\nu D', p^{2\nu} D_y)$$

とおくと、(2) が成立すれば、任意のコンパクト集合 $W \subset \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+$
に対して、正数 $\rho(W)$ が存在して、

$$(3) \quad \|u\|_{p, W_T^-} \leq C_p p^{2\nu\gamma} \{ \|L_p u\|_{q, W_T^-} + \|B_p u|_{y=0}\|_{q, \widehat{W}_T^-} \}$$

for $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall u \in C^0(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+)$, $\text{supp } u \subset W_T^+$, and $\rho \geq \rho(W)$

が成立する。ここで、 C_p は W によらない正定数で、 $T=0$
のとき $T'=0$ であり、 $T < 0$ のとき T' は任意にとれる。今、
 $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in P(0, 0, \xi^0, \eta) = 0$ の虚部正をもつ相異なる根とし、

$$\varphi_s(x, y, p, t) = p y \cdot \lambda_s + p^{K+1} (x_1 - t) \cdot \xi_1^0 + p^{\nu+1} x' \cdot \xi^0 + i p |x'|^2$$

$$1 \leq s \leq r, \quad t \in \mathbb{R}$$

とおけば、

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi_s(x, y, p, t)} L_p(e^{i\varphi_s} u) &= \begin{pmatrix} p^{(2\nu+1)m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{(2\nu+1)m_N} \end{pmatrix} \{ L(0, 0, \xi^0 + p^{-K-1} D_1, y, \\ & \lambda_s + p^{-1} D_y) + \sum_{k=\nu}^{N_1-1} p^{-k} C_{sR}(x, y, D, D_y) + p^{-N_1} R_{sN_1}(x, y, p; D, D_y) \} \\ &\times \begin{pmatrix} p^{(2\nu+1)n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{(2\nu+1)n_N} \end{pmatrix} u(x, y) \end{aligned}$$

とかける。ここで、 $C_{sR}(x, y, D, D_y)$ は m 階の微分作用素で係数は (x, y) の多項式を成分とする行列であり、 $R_{sN_1}(x, y, \rho; D, D_y)$ は m 階の微分作用素で (x, y) が有界集合をうごくとき係数のすべての導関数が $\rho > \rho_0 > 0$ に対して一様有界である。

$$u_s(x, y) = \begin{pmatrix} \rho^{-(2\nu+1)n_1} \\ \vdots \\ \rho^{-(2\nu+1)n_N} \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{N_1-1} \rho^{-k} u_s^k(x, y)$$

において、

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \rho^{-(2\nu+1)m_1} \\ \vdots \\ \rho^{-(2\nu+1)m_N} \end{pmatrix} e^{-i\varphi_s} L_\rho(e^{i\varphi_s} u_s) = O(\rho^{-N_1})$$

をみたすように、 $\{u_s^k\}$ をとめよう。 $L^0(0, 0, \xi^0, \eta^0) \neq 0$ in η

であるので、可逆な $P(\eta), Q(\eta) \in M_N(\mathbb{C}[\eta])$ が存在して、

$$Q(\eta) L^0(0, 0, \xi^0, \eta^0) P(\eta) = \begin{pmatrix} e_1(\eta) & & \\ & \ddots & \\ & & e_N(\eta) \end{pmatrix} \equiv \Lambda(\eta),$$

$$e_j(\eta) = \prod_{s=1}^r (\eta - \lambda_s)^{\mu_{sj}} \tilde{e}_j(\eta)$$

とできる。ここで、 $e_j(\eta)$ は η の多項式で $\tilde{e}_j(\eta) \neq 0$ ($1 \leq s \leq r$)

をみたす。また、 μ_{sj} は非負整数で、 $\mu_s \equiv \sum_{j=1}^N \mu_{sj}$ は λ_s の重複度に等しい。

$$(5) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} \tilde{u}_s^k(x, y) \sim P(\lambda_s + \rho^{-1} D_y)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} u_s^k(x, y)$$

によって、 \tilde{u}_s^k を定義する。そのとき、

$$(6) \quad \left\{ \Lambda(\lambda_s + \rho^{-1} D_y) + Q(\lambda_s + \rho^{-1} D_y) (L^0(0, 0, \xi^0 + \rho^{-K-1} D, \eta, \lambda_s + \rho^{-1} D_y) \right. \\ \left. - L^0(0, 0, \xi^0, \lambda_s + \rho^{-1} D_y) + \sum_{k=\nu}^{\infty} \rho^{-k} C_{sR}(x, y, D, D_y)) P(\lambda_s + \rho^{-1} D_y) \right\} \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} \tilde{u}_s^k(x, y) \sim 0$$

をみたすように \tilde{u}_s^k をとめれば、(5) によって u_s^k をとめ

て、(4)が成立することがわかる。ここで、 \sim は p' についての形式的べき級数として、両辺が等しいことを表わす。

$$e_j(\lambda_s + \eta) = c_{sj} \mu_{sj} \eta^{\mu_{sj}} + c_{sj} \mu_{sj+1} \eta^{\mu_{sj}+1} + \dots + c_{sj} \nu_j \eta^{\nu_j},$$

$$c_{sj} \mu_{sj} \neq 0, \quad 1 \leq s \leq r, \quad 1 \leq j \leq N,$$

$$sA(\xi, \eta) = Q(\eta)(L^0(0, 0, \xi^0 + \xi^0, \eta) - L^0(0, 0, \xi^0, \eta))P(\eta),$$

$$sA(\xi, \lambda_s + \eta) = \sum_{p=0}^{\tilde{m}} \sum_{q=1}^m \eta^p \xi^q A_s^{(pq)}, \quad 1 \leq s \leq r,$$

$$A_s^{(pq)} = (a_{sij}^{(pq)})_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, N},$$

と表わせば、(6)は、

$$(6)' \quad c_{sj} \mu_{sj} D_y^{\mu_{sj}} \tilde{u}_{sj}^{\sim k - \mu_{sj}} + \dots + c_{sj} \nu_j D_y^{\nu_j} \tilde{u}_{sj}^{\sim k - \nu_j}$$

$$+ \sum_{p=0}^{\tilde{m}} \sum_{q=1}^m \sum_{i=1}^N a_{sji}^{(pq)} D_i^p D_y^q \tilde{u}_{si}^{\sim k - p - q(K+1)} + f_{sjk}(\tilde{u}_s^{\sim k - \nu}, \dots, \tilde{u}_s^0) = 0,$$

$$1 \leq j \leq N, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

と同値になる。ここで、 $\tilde{u}_s^k = (\tilde{u}_{s1}^k, \dots, \tilde{u}_{sN}^k)$ である。また、 $\{f_{sjk}\}$ は $\{c_{sjk}\}$ と P, Q より定まる関数である。

$$K = \max \{ \mu_{sj} ; 1 \leq s \leq r, 1 \leq j \leq N \}$$

ととれば、(6)' より $y = 0$ で

$$(7) \quad D_y^{i-1} \tilde{u}_{sj}^k(x, y)|_{y=0} = \sigma_{sji}^{k+i-1}(x), \quad 1 \leq i \leq \mu_{sj}, 1 \leq s \leq r, 1 \leq j \leq N$$

を任意に指定することにより、 \tilde{u}_s^k が一意に定まる。次に

$$\{\sigma_{sji}^k(x)\} \in$$

$$(8) \quad \begin{pmatrix} p^{-(2\nu+1)b_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{-(2\nu+1)b_l} \end{pmatrix} e^{-i\{p^{K+1}(x_1-t)\cdot\xi_1^0 + p^{\nu+1}x\cdot\xi^0 + i p|x|^2\}}$$

$$\times B_p\left(\sum_{s=1}^r e^{i\varphi_s} u_s\right)|_{y=0} = O(p^{-N_1})$$

なるようにきめよう。そのために常微分方程式系

$$(9) \quad \begin{cases} L^0(0, 0, \xi^0 + p^{-K-1} \xi \downarrow, p^{-1} D_y) v(y) = 0, & y > 0, \\ B^0(0, \xi^0 + p^{-K-1} \xi \downarrow, p^{-1} D_y) v(y)|_{y=0} = h \end{cases}$$

を考えよう。ここで、 $\xi \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}^l$ である。

補題 11. 正数 C と p_0 が存在して、 $0 < |\xi| < C$, $p > p_0$ に対して、(9) は解 $v(y) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ をもち、 $v(y)$ は

$$v(y) \equiv v(y, \xi, p) = \sum_{s=1}^r e^{i p \lambda_s y} v_s(y, \xi, p),$$

$$v_s(y, \xi, p) = \sum_{k=-t_s}^{\infty} p^{-k} v_s^k(y, \xi)$$

とかけられる。ここで、 $v_s^k(y, \xi)$ は $y \geq 0$, $0 < |\xi| \leq C$ に対して正則で、上の級数は $p > p_0$ で収束する。また、 t_s は L^0, B^0 に依存してきまる整数である。

証明は略する。 $\tilde{v}(y) = P(p^{-1} D_y)^{-1} v(y)$ とおけば、(9) での h を $p^{-t_0 - \tilde{b}} h$ で置きかえたものは、

$$(9)' \quad \begin{cases} (\Lambda(p^{-1} D_y) + p^{-K-1} \xi A(p^{-K-1} \xi, p^{-1} D_y)) \tilde{v}(y) = 0, & y > 0, \\ \tilde{B}^0(p^{-K-1} \xi, p^{-1} D_y) \tilde{v}(y)|_{y=0} = p^{-t_0 - \tilde{b}} h \end{cases}$$

と同値である。ここで、

$$\tilde{B}^0(\xi, \eta) = B^0(0, \xi^0 + \xi \downarrow, \eta) P(\eta),$$

$$\tilde{b} = \deg \tilde{B}^0(\xi, \eta), \quad t_0 = \max_{1 \leq s \leq r} t_s$$

である。補題 11 より、

$$\tilde{v}(y, \xi, p) \equiv \tilde{v}(y) = \sum_{s=1}^r e^{i p \lambda_s y} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k} \tilde{v}_s^k(y, \xi)$$

と書かれる。故に、

$$c_{sj} \mu_{sj} D_y^{\mu_{sj}} \tilde{v}_{sj}^{k-\mu_{sj}} + \dots + c_{sj} \nu_j D_y^{\nu_j} \tilde{v}_{sj}^{k-\nu_j} \\ + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^m \sum_{i=1}^N s^q a_{sji}^{(pq)} D_y^p \tilde{v}_{si}^{k-p-q(k+1)} = 0, \quad 1 \leq s \leq r, 1 \leq j \leq N, \\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{v}_s^k = 0 \quad \text{for } k \leq \tilde{b}-1$$

をみえる。

$$\tilde{\sigma}_{sji}^{k+i-1}(\zeta) = D_y^{i-1} \tilde{v}_{sj}^k(y, \zeta)|_{y=0}, \quad 1 \leq i \leq \mu_{sj}, 1 \leq s \leq r, \\ 1 \leq j \leq N,$$

$$\tilde{\sigma}^k = {}^t(\tilde{\sigma}_1^k, \dots, \tilde{\sigma}_r^k) : l \times 1$$

$$\tilde{\sigma}_s^k = {}^t(\tilde{\sigma}_{s11}^k, \dots, \tilde{\sigma}_{s1\mu_{s1}}^k, \tilde{\sigma}_{s21}^k, \dots, \tilde{\sigma}_{sN\mu_{sN}}^k) : \mu_s \times 1$$

とおけば、次の補題が成立する。

補題 12.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{0 \leq q(k+1) + \tilde{b} \leq k} \rho^{-k} s^q G_q \tilde{\sigma}^{k-q(k+1)} = \rho^{-\tilde{b}_0 - \tilde{b}} h, \\ \tilde{\sigma}^k = 0, \quad k \leq \tilde{b}-1.$$

ここで、 G_q は $l \times l$ 行列で L^0, B^0 よりなるものである。

補題 13. $\det(\sum_{q=0}^{\infty} s^q G_q) \neq 0$, すなわち、非負整数 δ_0 と零でない定数 C が存在して、

$$\det(\sum_{q=0}^{\infty} s^q G_q) = C s^{\delta_0} + O(s^{\delta_0+1}) \quad \text{as } s \rightarrow 0$$

が成立する。さらに、 $\det G_0 = 0$ である。すなわち、 $\delta_0 \geq 1$

である。ここで、 $\sum_{p=0}^{\infty} s^p G_p$ を s の形式的べき級数環上の行列と考えている。

$$\sigma^k = {}^t({}^t\sigma_1^k, \dots, {}^t\sigma_r^k),$$

$$\sigma_s^k = {}^t(\sigma_{s11}^k, \dots, \sigma_{s1\mu_{s1}}^k, \sigma_{s21}^k, \dots, \sigma_{sN\mu_{sN}}^k)$$

とおく (σ_{sjv}^k は (7) で定義されたもの)。

$$(10) \quad \begin{cases} \sum_{0 \leq p(k+1)+b \leq k, p \geq 0} G_p D_1^p \sigma^{k-p(k+1)}(x) \\ \quad + f^k(\tilde{u}^{k+k-1}, \dots, \tilde{u}^0) = 0, \quad k=0, \dots, N_1-1 \\ \sigma^k = 0, \quad k \leq b-1 \end{cases}$$

をみたすように σ^k をえらび、(5), (6), (7) によって u_s^k を定めれば、そのとき (8) が成立する。ここで、 f^k は L, B よりきまるバウトル値関数である。今、補題 13 と単因子論より可逆な $\tilde{P}(s), \tilde{Q}(s) \in M_\ell(\mathbb{C}[s])$ が存在して、

$$\tilde{Q}(s) \left(\sum_{p=0}^{\infty} s^p G_p \right) \tilde{P}(s) = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{e}_\ell(s) \end{pmatrix}, \quad \max_{1 \leq j \leq \ell} \tilde{\mu}_j = \tilde{\mu} \geq 1,$$

$$\tilde{e}_j(s) = s^{\tilde{\mu}_j} + a_j \tilde{\mu}_{j+1} s^{\tilde{\mu}_{j+1}} + \dots + \tilde{a}_j \tilde{\mu}_j s^{\tilde{\mu}_j}, \quad 1 \leq j \leq \ell,$$

とできる。故に、 $\nu = (k+1)\tilde{\mu} + 2k + b$ ととれば、(10) をみたす $\{\sigma^k(x)\}$ で $\sigma^b(t, 0) \neq 0$ なるものが存在する。よって、(4), (8) をみたす漸近解 u_s が構成された。 $\chi(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}_+})$, $\text{supp } \chi \subset U_1$ かつ $\chi(x, y) = 1$ on U_2 なる χ をとる。ここで、 U_j は $(x, y) = (t, 0)$ の $\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}_+}$ における近傍で、 $(x, y) \in U_1$ に対して、 $x_1 > T'$ が成立しているものとする。

$$v(x, y) = \sum_{s=1}^r e^{i\varphi_s(x, y, p, t)} \chi(x, y) u_s(x, y)$$

とおけば、

$$(11) \quad \begin{cases} L_p v(x, y) = O(p^{-N_1 + (2\nu+1)m_0}), & x_1 \leq t, \\ B_p v(x, y)|_{y=0} = O(p^{-N_1 + (2\nu+1)b_0}), & x_1 \leq t \end{cases}$$

が成立する。 $2 \geq 7$ 、 $m_0 = \max_{1 \leq j \leq N} m_j$ 、 $b_0 = \max_{1 \leq j \leq l} b_j$ である。実際、

$$\operatorname{Re} i\varphi_s(x, y, p, t) \leq -cp, \quad (x, y) \in U_1 \setminus U_2, \quad x_1 \leq t$$

が成立することと注意すれば、(19)は明らかである。故に、 N_1 を十分大きくとれば、(3)に矛盾する。定理6および定理4のきちんとした証明は、[13]を参照されたい。

REFERENCES

- [1] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions' II, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.
- [2] Bierstone, E., Extension of Whitney fields from subanalytic sets, Invent. Math., 46 (1978), 277-300.
- [3] Ivrii, V. Ja. and Petkov, V. M., Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Uspehi Mat. Nauk, 29 (1974), no. 5, 3-70. (Russian; English translation in Russian Math. Surveys.)
- [4] Kajitani, K., A necessary condition for the well posed hyperbolic mixed problem with variable coefficients, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), 231-242.
- [5] Lax, P. D., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24 (1957), 624-646.
- [6] Mizohata, S., Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1961), 109-127.
- [7] _____, On evolution equations with finite propagation speed, Israel J. Math., 13 (1972), 173-187.
- [8] Sakamoto, R., \mathcal{E} -well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), 93-118.

- [9] Seely, R. T., Extension of C^∞ functions defined in a half space, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 625-626.
- [10] Soga, H., Mixed problems in a quarter space for the wave equation with a singular oblique derivative, to appear.
- [11] _____, Mixed problems for the wave equation with a singular oblique derivative, to appear.
- [12] Solonnikov, V. A., On general boundary problems for systems which are elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. I, Izv. Akad. Nauk, 28 (1964), 665-706. (Russian; English translation in Amer. Math. Soc. Transl., 56 (1966), 193-232.)
- [13] Wakabayashi, S., A necessary condition for the mixed problem to be C^∞ well-posed, in preparation.